

**№3 Методы решения задачи линейного программирования****Дано:**  $f(X) = x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr}$ 

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \quad (1)$$

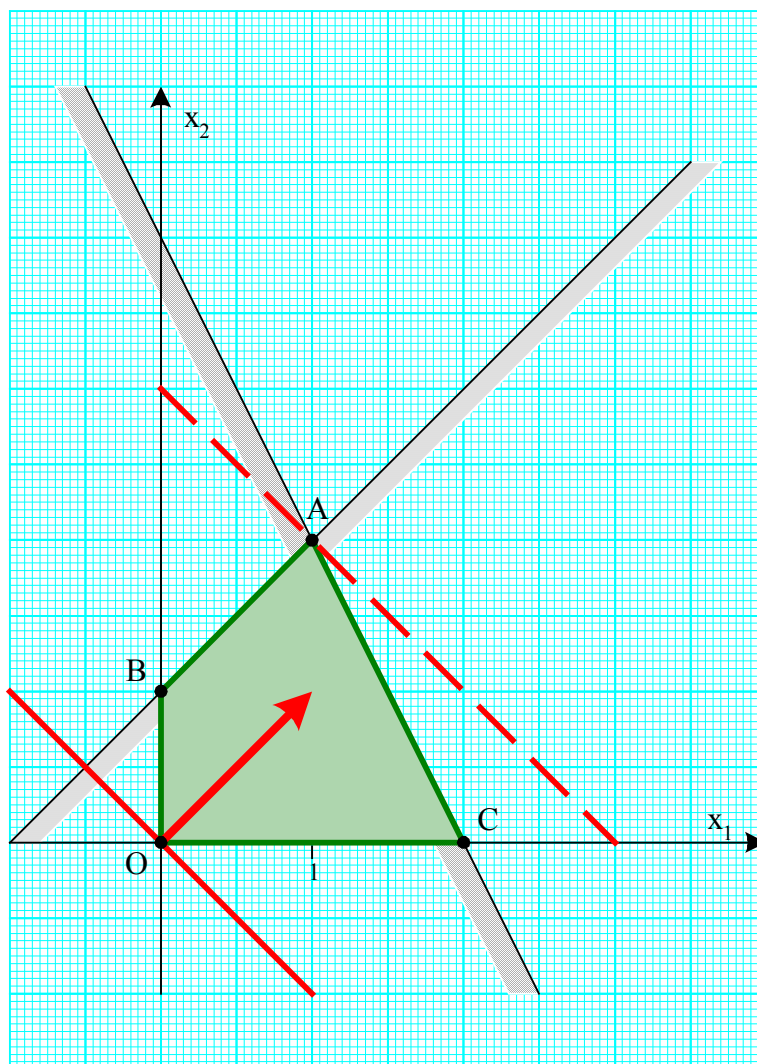
$$2x_1 + x_2 \leq 4 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (3)$$

**Решение:****а) Решить задачу графически**

Для графического решения задачи построим:

- множество допустимых решений, задаваемое ограничениями (1)-(3);
- градиент функции  $\nabla f(X) = (1, 1)^T$  в точке с координатами (0, 0);
- линию уровня функции  $f(X) = C$ , проходящую через точку с координатами (0, 0). Для этого найдем значение константы  $C$ :  $C = f(0, 0) = 0 + 0 = 0$ , и затем построим прямую  $x_1 + x_2 = 0$ .



Будем искать точку максимума функции как последнюю точку касания линии уровня функции и множества допустимых решений в направлении градиента функции. Как видно из чертежа, это точка  $A = (1, 2)$ . Таким образом, получено решение задачи поиска максимума функции:

$$x_1^* = 1$$

$$x_2^* = 2$$

$$f(X_{\max}^*) = 1 + 2 = 3$$

Будем искать точку минимума функции как первую точку касания линии уровня функции и множества допустимых решений в направлении градиента функции<sup>□</sup>). Как видно из чертежа, это точка  $O = (0, 0)$ . Таким образом, получено решение задачи поиска минимума функции:

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = 0$$

$$f(X_{\min}^*) = 0 + 0 = 0$$

---

□) Первая точка касания линии уровня функции и множества допустимых решений в направлении градиента функции есть последняя точка касания линии уровня функции и множества допустимых решений в направлении антиградиента функции.

**б) Решить задачу симплекс-методом**

Найдем максимум функции. Будем рассматривать задачу:

$$\begin{aligned} f(X) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Подготовим задачу к решению симплекс-методом:

Перейдем от задачи в основной постановке к задаче в канонической:

$$\begin{aligned} f(X) &= x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 1x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$x_3, x_4$  - дополнительные переменные в задаче

Выпишем столбцы при переменных в ограничениях:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Базис в задаче есть, т.к. среди выписанных столбцов есть 2 базисных (столбцы единичной матрицы (2 x 2)).

Окончательно получаем задачу, подготовленную к решению симплекс-методом:

$$\begin{aligned} f(X) &= x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 1x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Базисные переменные в задаче: в 1-м ограничении -  $x_3$ ,  
во 2-м ограничении -  $x_4$

Начальное базисное решение:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 4$$

В исходных переменных  $x_1, x_2$  это решение соответствует точке с координатами (0, 0).

Таблица №1

			1	1	0	0	$C_j$	
$C_i$	Бп	Бр	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$r_i$	
0	$x_3$	1	-1	1	1	0	1	Z-строка
0	$x_5$	4	2	1	0	1	4	
	$\Delta$		1	1	0	0		Z-столбец

Разрешающий элемент

Коэффициент пересчета

Базисное решение, соответствующее таблице №1:

$$x_3 = 1 \quad x_1 = 0$$

$$x_4 = 4 \quad x_2 = 0$$

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 - (0 + 0) = 1$$

$$\Delta_2 = 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - (0 + 0) = 1$$

Т.к.  $\Delta_1 = \Delta_2 > 0$  выбираем  $\Delta_2$ , т.к. ей соответствует переменная с большим номером, следовательно, в базис вводится переменная  $x_2$ . Соответствующий этой переменной столбец – Z-столбец.

Вычислим величины  $r_i$ , как отношения элементов столбца Бр к элементам Z-столбца:

$$r_1 = \frac{1}{1} = 1 \quad r_2 = \frac{4}{1} = 4$$

Из базиса выводится переменная  $x_3$ , т.к. ей по строке соответствует минимальная неотрицательная величина  $r_1$ , соответствующая ей строка – Z-строка.

На пересечении Z-столбца и Z-строки, находится разрешающий элемент  $R = 1$ .

Осуществим пересчет таблицы:

- запишем коэффициенты функции в верхнюю строку новой таблицы №2;
- запишем в новую таблицу №2 новые базисные переменные  $x_2$  и  $x_4$ ;
- запишем коэффициенты функции при новых базисных переменных в первый столбец таблицы №2
- пересчитаем Z-строку: разделим Z-строку на разрешающий элемент, результат запишем в 1-ю строку таблицы №2 – получится **разрешающая строка**;

$$\begin{array}{l} \text{Z-строка} \left( \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) / 1 \\ \text{Результат} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

- пересчитаем оставшуюся строку: умножим разрешающую строку на коэффициент пересчета - 2-й элемент Z-столбца – это (1), и вычтем из 2-й строки таблицы №1, результат запишем во 2-ю строку таблицы №2:

$$\begin{array}{rcccccc}
 \text{Строка 2 таблицы №1} & \text{—} & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
 \text{Разрешающая строка * (1)} & & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
 \hline
 \text{Результат} & & 3 & 3 & 0 & -1 & 1
 \end{array}$$

Таблица №2

			1	1	0	0	$C_j$	
$C_i$	Бп	Бр	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$r_i$	
1	$x_3$	1	-1	1	1	0	-1	
0	$x_4$	3	3	0	-1	1	1	Z-строка
		$\Delta$	2	0	-1	0		Z-столбец

Базисное решение, соответствующее таблице №2:

$$x_2 = 1 \quad x_1 = 0$$

$$x_4 = 3 \quad x_3 = 0$$

В исходных переменных  $x_1, x_2$  это решение соответствует точке с координатами (0, 1).

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = 1 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 - (-1 + 0) = 2$$

$$\Delta_3 = 0 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 - (1 + 0) = -1$$

Т.к.  $\Delta_1 = \max(\Delta_1, \Delta_3)$  и  $\Delta_1 > 0$ , то в базис вводится переменная  $x_1$ , соответствующий этой переменной столбец – Z-столбец.

Вычислим величины  $r_i$ , как отношения элементов столбца Бр к элементам Z-столбца:

$$r_1 = \frac{1}{-1} = -1 \quad r_2 = \frac{3}{3} = 1$$

Из базиса выводится переменная  $x_4$ , т.к. ей по строке соответствует минимальная неотрицательная величина  $r_2$ , соответствующая ей строка – Z-строка.

На пересечении Z-столбца и Z-строки, находится разрешающий элемент  $R = 3$ .

Осуществим пересчет таблицы:

- запишем коэффициенты функции в верхнюю строку новой таблицы №3;
- запишем в новую таблицу №3 новые базисные переменные  $x_2$  и  $x_1$ ;
- запишем коэффициенты функции при новых базисных переменных в первый столбец таблицы №3

- пересчитаем Z-строку: разделим Z-строку на разрешающий элемент, результат запишем во 2-ю строку таблицы №3 – получится **разрешающая строка**;

$$\begin{array}{r} \text{Z-строка} \left( \begin{array}{ccccc} 3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) / 3 \\ \hline \text{Результат} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{array} \end{array}$$

- пересчитаем оставшуюся строку: умножим разрешающую строку на коэффициент пересчета - 1-й элемент Z-столбца – это (-1), и вычтем из 1-й строки таблицы №2, результат запишем в 1-ю строку таблицы №3:

$$\begin{array}{r} \text{Строка 1 таблицы №2} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \\ \text{Разрешающая строка} \cdot (-1) \quad \begin{array}{ccccc} -1 & -1 & 0 & 1/3 & -1/3 \end{array} \\ \hline \text{Результат} \quad \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \end{array} \end{array}$$

Таблица №3

			1	1	0	0	$C_j$
$C_i$	Бп	Бр	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$r_i$
1	$x_2$	2	0	1	2/3	1/3	
1	$x_1$	1	1	0	-1/3	1/3	
$\Delta$			0	0	-1	0	

Базисное решение, соответствующее таблице №3:

$$x_2 = 2 \quad x_3 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_4 = 0$$

В исходных переменных  $x_1, x_2$  это решение соответствует точке с координатами (1, 2).

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_3 = 0 - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = 0 - (2/3 - 1/3) = -1/3$$

$$\Delta_4 = 0 - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 0 - (1/3 + 1/3) = -2/3$$

Т.к. все симплекс-разности в таблице №3 неположительны и в состав базисных переменных не входят искусственные, то решение найдено:

$$x_1^* = 1$$

$$x_2^* = 2$$

$$x_3^* = 0$$

$$x_4^* = 0$$

А в исходных переменных – это точка  $A = (1, 2)$ .

Найдем минимум функции. Будем рассматривать задачу:

$$\begin{aligned} f(X) &= x_1 + x_2 \rightarrow \min \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Перейдем к задаче поиска максимума, для этого умножим функцию на (-1), получим:

$$\begin{aligned} f(X) &= -x_1 - x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Т.к. данная задача отличается от решенной только коэффициентами функции, воспользуемся результатами подготовки задачи для поиска максимума исходной функции, получим:

$$\begin{aligned} f(X) &= -x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 1x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Базисные переменные в задаче: в 1-м ограничении -  $x_3$ ,  
во 2-м ограничении -  $x_4$

Начальное базисное решение:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 4$$

В исходных переменных  $x_1, x_2$  это решение соответствует точке с координатами (0, 0).

**Таблица №1**

			-1	-1	0	0	$C_j$
$C_i$	Бп	Бр	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$r_i$
0	$x_3$	1	-1	1	1	0	1
0	$x_4$	4	2	1	0	1	4
		$\Delta$	-1	-1	0	0	

Базисное решение, соответствующее таблице №1:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 & x_1 &= 0 \\ x_4 &= 4 & x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Вычислим симплекс-разности для небазисных переменных:

$$\Delta_1 = -1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 - (0 \cdot 0) = -1$$

$$\Delta_2 = -1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 - (0 \cdot 0) = -1$$

Т.к. все симплекс-разности в таблице №1 неположительны и в состав базисных переменных не входят искусственные, то решение найдено:

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = 0$$

$$x_3^* = 1$$

$$x_4^* = 4$$

А в исходных переменных – это точка  $O = (0, 0)$ .